Prednáška 9

Môžeme prejsť k definícii všeobecného integrálu a jeho vlastnostiam. Je založený na definícii integrálu z j.n.m. funkcií.

Definícia 9.0.1.

Nech f je nezáporná merateľná funkcia na $M \in \mathcal{M}_n$. Potom definujeme Lebesgueov integrál funkcie f cez množinu M ako

$$\int_M f \, d\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{s \leq f} \int_M s \, d\lambda_n,$$

kde sa supremum berie cez všetky j.n.m. funkcie s také, že $s \leq f$ s.v. na M. Ak je f merateľná funkcia na $M \in \mathcal{M}_n$ (nie nutne nezáporná) a aspoň jeden z integrálov na pravej strane je konečný, potom definujeme

$$\int_M f \, d\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \int_M f^+ \, d\lambda_n - \int_M f^- \, d\lambda_n.$$

Definícia 9.0.2.

Množinu všetkých funkcií, ktoré majú Lebesgueov integrál cez množinu $M \in \mathcal{M}_n$ označujeme $\mathcal{L}_n^*(M)$ a ak tento integrál je konečný, tak $\mathcal{L}_n(M)$.

Poznámka 9.0.3.

I keď je množina $\mathcal{L}_n^*(M)$ dosť obsiahla, neobsahuje všetky funkcie merateľné na M. Napríklad funkcia $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \notin \mathcal{L}_n^*(\mathbb{R})$. Prečo? Obsahuje však všetky funkcie merateľné na M, ktoré sú s.v. na M nezáporné (nekladné).

Poznámka 9.0.4.

Uvedomme si základné vlastnosti, ktoré plynú priamo z definície 9.0.1 a poznámky 8.2.2. Ak f je nezáporná merateľná funkcia na M, potom $\displaystyle\int_M f \, d\lambda_n \geq 0$. Ak $f = 0$ s.v. na M, potom $\displaystyle\int_M f \, d\lambda_n = 0$. Všimnime si, že v definícii 9.0.1 môžeme brať supremum iba tie j.n.m. funkcie, ktoré sú nulové mimo množiny M. Taktiež je zrejmé, že 2 ekvivalentné funkcie na $M \in \mathcal{M}_n$ buď obe majú integrál cez M a to rovnaký, alebo integrál nemajú. Integrál ľubovoľnej funkcie cez množinu nulovej miery je rovný nule.

Platí $f \in \mathcal{L}_n(M) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}_n(M)$.

Veta 9.0.5 (Nerovnosti medzi integrálmi)**.**

Nech f, g sú merateľné na $M \in \mathcal{M}_n$ a $f \leq g$ s.v. na M. Potom platí:

(I) $g \in \mathcal{L}_n^*(M)$ a $\int_M g \, d\lambda_n < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}_n^*(M)$
$f \in \mathcal{L}_n^*(M)$ a $\int_M f \, d\lambda_n > -\infty \Rightarrow g \in \mathcal{L}_n^*(M)$.

(II) Ak sú $f, g \in \mathcal{L}_n^*(M)$, potom

$$\int_M f \, d\lambda_n \leq \int_M g \, d\lambda_n.$$

Dôsledok 9.0.6.

Nech f je merateľná na $M \in \mathcal{M}_n$. Potom platí:

(1) ak je $h \leq f \leq g$ s.v. na M, kde $h, g \in \mathcal{L}_n(M)$, potom je $f \in \mathcal{L}_n(M)$ a

$$\int_M h \, d\lambda_n \leq \int_M f \, d\lambda_n \leq \int_M g \, d\lambda_n.$$

(2) nech je $\lambda_n(M) < \infty$ a f je ohraničená s.v. na M, potom je $f \in \mathcal{L}_n(M)$.

(3) ak je $M \subset \mathbb{R}^m$ kompaktná a f spojitá na M, je $f \in \mathcal{L}_n(M)$.

Veta 9.0.7.

Ak je $f \in \mathcal{L}_n^*(M)$, je aj $|f| \in \mathcal{L}_n^*(M)$ a platí

$$\left| \int_M f \, d\lambda_n \right| \leq \int_M |f| \, d\lambda_n.$$

Všeobecne neplatí opačné tvrdenie, viď príklad v poznámke 9.0.3. V prípade konečne integrovateľných funkcií to nemôže nastať.

Veta 9.0.8.

Nech f je merateľná na $M \in \mathcal{M}_n$. Potom $f \in \mathcal{L}_n(M) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_n(M)$.

Nasledujúca veta sa často používa, ak chceme ukázať, že nejaká funkcia má konečný integrál. Stačí ukázať jej merateľnosť a nájsť integrovateľnú majorantu.

Veta 9.0.9.

Nech f je merateľná na $M \in \mathcal{M}_n$ a existuje $g \in \mathcal{L}_n(M)$, splňujúca $|f| \leq g$ s.v. na M Potom je $f \in \mathcal{L}_n(M)$ a

$$\left| \int_M f \, d\lambda_n \right| \leq \int_M g \, d\lambda_n.$$

V jednorozmernom prípade je dôležité nasledujúce kritérium, ktoré je istou analógiou k porovnávaciemu kritériu pre rady. Obdobná veta platí aj pre interval $(-\infty, b)$, $\; b \in (-\infty, 0)$.

Veta 9.0.10 (Porovnávacie kritérium)**.**

Nech $-\infty < a < b \leq \infty$ a nech $f, g \in C([a, b))$ a nezáporné na danom intervale. Ak existuje

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

potom platí:

(i) Ak je $A \in (0, \infty)$, potom $g \in \mathcal{L}_1(a, b) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_1(a, b)$.

(ii) Ak je $A = 0$ a $g \in \mathcal{L}_1(a, b)$, potom aj $f \in \mathcal{L}_1(a, b)$.

(iii) Ak je $A = \infty$ a $g \notin \mathcal{L}_1(a, b)$, potom aj $f \notin \mathcal{L}_1(a, b)$.

Poznámka 9.0.11.

Ak je napríklad $0 < a < \infty$, $b = \infty$ a nájdeme také α, že $x^\alpha f(x) \to A \in (0, \infty)$, potom f (ne)patrí do $\mathcal{L}_1(a, \infty)$ práve vtedy keď $1/x^\alpha$ (ne)patrí do $\mathcal{L}_1(a, \infty)$ (to už je relatívne jednoduché určiť).

Príklad 9.0.12.

Overme, že $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_1(1, 9)$. Vieme, že f je spojitá a nezáporná na $(1, 9)$ a je ohraničená na každom intervale $[a, 9]$ s $1 < a < 9$. Pritom pre $g(x) = 1/\sqrt{x-1}$ je

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x+1}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} < \infty.$$

Pretože je g z $\mathcal{L}_1(1, 9)$, dostaneme požadované.

Veta 9.0.13 (Závislosť na integračnom obore).

Nech f je nezáporná merateľná na $A, M \in \mathcal{M}_n,\ A \subset M$. Potom je

$$\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_n \leq \int_M f \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Naviac, ak je $f \in \mathcal{L}_n^*(M)$ $(f \in \mathcal{L}_n(M))$, potom je $f \in \mathcal{L}_n^*(A)$ $(f \in \mathcal{L}_n(A))$ a funkcia $\phi(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda_n$ je (konečná) $\sigma-$aditívna funkcia na σ-algebre všetkých merateľných podmnožín množiny M. Špeciálne pre $A \cap B = \emptyset,\ \ A, B \in \mathcal{M}_n,\ A, B \subset M$ je

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda_n + \int_B f \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Veta 9.0.14.

Nech $f \in \mathcal{L}_n^*(M) \cap \mathcal{L}_n^*(P)$, pričom súčet $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda_n + \int_P f \, \mathrm{d}\lambda_n$ má zmysel v $\mathbb{R}^*$. Potom je $f \in \mathcal{L}_n^*(M \cup P)$. Ak je pritom $f \in \mathcal{L}_n(M) \cap \mathcal{L}_n(P)$, je tiež $f \in \mathcal{L}_n(M \cup P)$.

Táto veta sa používa k dôkazu existencie integrálu cez zjednotenie množín, pričom na jednotlivé množiny sa používa iný spôsob dôkazu.

Príklad 9.0.15.

Ukážeme, že funkcia $f(x) = \sin(1/x)$ je z $\mathcal{L}_1^*(\mathbb{R}^+)$. Keďže je f na $\mathbb{R}^+$ spojitá, je tam aj merateľná. Na $I = (0, 1/\pi)$ je ohraničená a $\lambda_n(I) < \infty$. Preto je podľa dôsledku 9.0.6 $f \in \mathcal{L}_1(I)$. Na $J = [1/\pi, \infty)$ je spojitá a nezáporná, a teda má integrál. Ich súčet má zmysel $\mathbb{R}^*$ a teda $f \in \mathcal{L}_1^*(\mathbb{R}^+)$.

Poznámka 9.0.16.

Pretože miera intervalu $[a, a]$ je nulová, potom pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}^*$ pre danú funkciu jej integrály cez intervaly $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ existujú a sú si rovné, alebo neexistujú na žiadnom z nich. Môžeme teda zaviesť označenie

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\lambda_1 = (L) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Lema 9.0.17 (Linearita integrálu)**.**

Nech $f, g \in \mathcal{L}_n^*(M),\ a, b \in \mathbb{R}$ a nech $\alpha \int_M f \,\mathrm{d}\lambda_n + \beta \int_M g \,\mathrm{d}\lambda_n$ má zmysel v $\mathbb{R}^*$. Potom je aj $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_n^*(M)$ a platí $\int_M (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\lambda_n = \alpha \int_M f \,\mathrm{d}\lambda_n + \beta \int_M g \,\mathrm{d}\lambda_n$.

Ďalej nás bude zaujímať limitný prechod, tj. kedy z konvergencie postupnosti f_n bude vyplývať aj konvergencia postupnosti integrálov. Pozrime si nasledujúce príklady poukazujúce na to, čo vo všeobecnosti neplatí.

Príklad 9.0.18.

Majme

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

potom je $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = n\frac{2}{n} = 2 \to 2$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (takže s.v. na $\mathbb{R}$), a teda

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0.$$

Takže neplatí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Príklad 9.0.19.

Pre

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, n], \\ -1, & x \in [-n, 0), \\ 0, & |x| > n,\ x = 0, \end{cases}$$

je

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0, \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ ale } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn} x \notin \mathcal{L}_1^*(\mathbb{R}).$$

Veta 9.0.20 (Leviho, o monotónnej konvergencii)**.**

Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ merateľných na $M \in \mathcal{M}_n$ je neklesajúca (nerastúca) pre s.v. $\mathbf{x} \in M$. Nech existuje funkcia g (h), ktorá spĺňa $g \leq f_1$ s.v. na M, $\int_M g \, d\lambda_n > -\infty$ ($h \geq f_1$ s.v. na M, $\int_M h \, d\lambda_n < \infty$). Potom $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ má na M integrál a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_n.$$

Teraz si vedieme príklad, ktorý ukazuje, že predpoklad $\displaystyle\int_M g \, d\lambda_n > -\infty$ vo vete je podstatný.

Príklad 9.0.21.

Pre $f_n(x) = -\frac{1}{n}$ je $f_n \uparrow 0$ na $\mathbb{R}$, ale $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1 = -\infty \not\to 0$.

Veta 9.0.22 (Lebesgueova o majorizovanej konvergencii)**.**

Majme postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ merateľných na $M \in \mathcal{M}_n$. Nech platí

(a) $f_n \to f$ s.v. na M,

(b) existuje $h \in \mathcal{L}_n(M)$: $|f_n| \leq h$ s.v. na M, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $f \in \mathcal{L}_n(M)$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_n.$$

Príklad 9.0.23.

Ukážme, že $L := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0$. Priamym výpočtom dostaneme, že integrál je rovný $\frac{1}{n(n+1)}$, čo zrejme konverguje k 0. No ukážeme si využitie Leviho vety. Platí

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n}, \quad \text{pre} \quad x \in (0,1), \; n \in \mathbb{N}$$

a tiež $x = \frac{x^1}{1} \in \mathcal{L}_1(0,1)$. Podľa vety je potom

$$L = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^1 0\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0.$$

Podobne možno použiť aj Lebesgueovu vetu.

V nasledujúcom príklade nie je možné použiť Leviho vetu (prečo?). Je však možné použiť vetu Lebesgueovu.

Problém 9.0.24.

Ukážte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0$.

Preformulujeme si tieto vety pre rady. Označme $S(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\mathbf{x})$.

Veta 9.0.25 (Levi)**.**

Nech funkcie v_n, $n \in \mathbb{N}$ sú nezáporné merateľné na $M \in \mathcal{M}_n$. Potom platí

$$S \in \mathcal{L}_n^*(M) \;\text{ a }\; \int_M S\, \mathrm{d}\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Ak naviac existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n\, \mathrm{d}\lambda_n \leq K$ pre $n \in \mathbb{N}$, potom $S \in \mathcal{L}_n(M)$ a $S(\mathbf{x})$ má konečný súčet pre s.v. $\mathbf{x} \in M$.

Veta 9.0.26 (Lebesgue)**.**

Nech funkcie v_n, $n \in \mathbb{N}$ sú merateľné na $M \in \mathcal{M}_n$, $g_n \in \mathcal{L}_n(M)$, $|v_n(\mathbf{x})| \leq g_n(\mathbf{x})$, $n \in \mathbb{N}$ pre s.v. $\mathbf{x} \in M$. Ak rada $\sum_{n=1}^{\infty} \int_M g_n \, d\lambda_n$ konverguje, tak $S(\mathbf{x})$ je konečný pre s.v. $\mathbf{x} \in M$, $S \in \mathcal{L}_n(M)$ a

$$\int_M S \, d\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n \, d\lambda_n.$$

Príklad 9.0.27.

Ukážme, že

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, d\lambda_1(x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Priamy výpočet nevedie k cieľu. Integrand je ale merateľný a nezáporný, takže integrál existuje. Rozviňme ho do rady

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-(n+1)x}, \quad x > 0.$$

Možno použiť Leviho vetu a teda

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} \, d\lambda_1(x).$$

Integrály na pravej strane existujú (ako nevlastné, viď vety nižšie) a rovnajú sa $\frac{1}{(n+1)^2}$. Integrál I sa teda rovná

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teraz si ukážeme vzťah Riemannovho a Lebesgueovho integrálu. Ak má f Riemannov integrál na intervale $[a, b]$, potom má aj Lebesgueov integrál a rovnajú sa. To je možné zovšeobecniť aj pre vyššie dimenzie. To nám umožní použiť k výpočtu Lebesgueovho integrálu postupy, ktoré už poznáme.

Veta 9.0.28.

Nech f je Riemannovsky integrovateľná na ohraničenej množine $A \subset \mathbb{R}^m$ potom $f \in \mathcal{L}_n(A)$ a platí

$$(L) \int_A f \, d\lambda_n = (R) \int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

(f je Riemannovsky integrovateľná na danej množine A, akk je nespojitá iba na množine $B \subset A: \lambda_n(B) = 0$).

Poznámka 9.0.29.

Táto veta sa netýka integrálu v zmysle hlavnej hodnoty, tj. integrálov typu

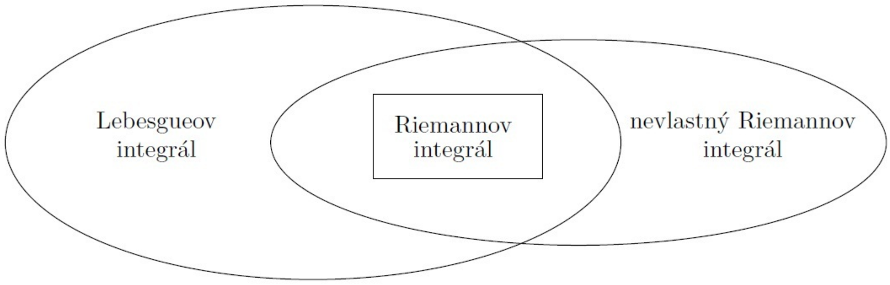
$$\text{p.v.} \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx \right),$$

kde $c \in [a, b]$ je také, že $\int_a^c f(x) \, dx = \pm\infty$ pre $a < c$ a $\int_c^b f(x) \, dx = \mp\infty$ pre $b > c$, alebo

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^a f(x) \, dx,$$

kde $\int_{-\infty}^0 f(x) \, dx = \pm\infty$ a $\int_0^\infty f(x) \, dx = \mp\infty$.
Typický príklad je $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$.

Nasledujúci príklad nám ukazuje, že ak existuje nevlastný Riemannov integrál, tak Lebesgueov ešte nemusí existovať.



Obr. 9.1: Vzťahy integrálov.

Príklad 9.0.30.

Uvažujme funkciu $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definovanú ako $f(x) = (-1)^n/n,\ x \in [n-1,n),\ n \in \mathbb{N}$. Zrejme je f ohraničená (Riemannovsky integrovateľná) na každom uzavretom ohraničenom podintervale $[0,\infty)$. Zoberme $I_m = [0,m], m \in \mathbb{N}$, potom $\int_{I_m} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{m}(-1)^n/n$ a limita

$$\lim_{m\to\infty}\int_{I_m} f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln 2.$$

Takže nevlastný Riemannov integrál $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje. Avšak je ľahké ukázať, že $f \notin \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_0^+)$. Ak by to tak bolo, tak podľa vety o majorizovanej konvergencii

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} |f|\,\mathrm{d}\lambda_1 \le \lim_{n\to\infty} |\chi_{[0,n]} f|\,\mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty,$$

lebo $|\chi_{[0,n]} f| \le |f|$ a $\chi_{[0,n]} f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_0^+),\ \forall n$.

Taktiež sa môže stať, že funkcia je Lebesgueovsky integrovateľná, ale nevlastný Riemannov integrál neexistuje. Nasledujúca veta nám dáva konkrétnejší vzťah medzi nimi v $\mathbb{R}$ na neohraničenej množine.

Veta 9.0.31.

Nech funkcia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná na každom uzavretom ohraničenom $I \subset [a,\infty)$. Potom $f \in \mathcal{L}_1([a,\infty)) \Leftrightarrow \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ (ako nevlastný integrál).

Príklad 9.0.32.

Uvažujme funkciu $f_\gamma(x) = x^\gamma, \ x > 0, \ \gamma \in \mathbb{R}$ a skúmajme jej integrál cez intervaly $(0,1), \ (1,\infty), \ (0,\infty)$. Zrejme

$$(L)\int_0^1 f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1,$$

$$(L)\int_1^\infty f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Itegrály na pravej strane za limitou existujú ako Riemannove integrály a navyše ľahko ich zrátame pomocou Newtonovho vzorca. Dostaneme

$$(L)\int_0^1 f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma+1}, & \gamma > -1, \\ \infty, & \gamma \le -1 \end{cases},$$

$$(L)\int_1^\infty f_\gamma \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma+1}, & \gamma < -1, \\ \infty, & \gamma \ge -1 \end{cases}.$$

Pomocou vety o integrovaní cez zjednotenie si ľahko určíme integrál na $(0,\infty)$.

Veta 9.0.33.

Nech $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná na každom $(a,b]$. Nech $|f|$ je neohraničená na ľubovoľnom okolí bodu a. Potom $f \in \mathcal{L}_1(I)$ práve vtedy a len vtedy, ak nevlastný Riemannov integrál $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ existuje.

Problém 9.0.34.

Overte, že funkcia $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2-1}}$ je z $\mathcal{L}_1(I), \ I = (1,2)$.